小中高連携を意識した関数の教育内容開発

― Research into education of function concepts according to students' developmental stage ―

佛教大学　二　澤　善　紀
関西学院大学　渡　邉　伸　樹　　神戸市立井吹台中学校　岡　　貴　大

抄　録

現在, 算数･数学教育において, 2校種間（小中･中高）の連携は盛んに行われているが, 3校種間（小中高）の連携を意識した研究や実践は多くない。そこで本稿では，児童・生徒の苦手分野の一つとして挙げられる「関数」領域に関して，特に必要と考えられる「現実事象とグラフを関係づける力」を育成できるような教育内容を小中高の連携を意識して開発した。そして開発した教育内容を実際に教育実践した結果，生徒の「現実事象とグラフを関連付ける力」が向上するなどの一定の成果が認められた。

Key Words：授業研究，小中高連携，現実事象，関数，グラフ

1．はじめに

現在，小中連携・小中一貫教育，中高一貫教育など2校種間の連携・一貫教育が全国的に盛んに進められている。しかしながら，算数・数学教育においては，その連携が必ずしも十分に機能していない現状がある。本来は，小学校から中学校，中学校から高等学校への教育内容に関する連携が必要となるものの，どちらかといえば技術面や形式面での連携が行われがちのためだと考えられる（渡邉，2010）。

こうしたこともあって，算数・数学の教育に関して，小中及び中高の教育内容の系統性や指導方法についての教員研修や研究会が数多く行われ, 研究も盛んに行われるようになっている。例えば，小中一貫教育全国連絡協議会主催の「第7回小中一貫教育全国サミットin京都」や，市町村単位，また一貫校や連携校による研究実践発表会は頻繁に開催されている。また学術研究については，論文，図書・雑誌などの学術情報で検索できるデータベース・サービスであるCiNiiにおいて，一定数の報告がなされている。

このように，2校種間の連携については改善の方向に向かっているものの，もっとも本質的な小中高という3校種間の教育内容の系統性を意識した研究・実践や教員研修や研究会はほとんどないのが実状である。例えば，2014年の数学教育学会春季年会及び秋季例会の研究発表をみても，小中高の教育内容の系統性を意識した研究発表はわずかである。

小中高の教育内容の系統性や指導方法の重要性については，子どもは小学校・中学校・高等学校と連続的に成長し教育を受けるにもかかわらず，その教育を行う教員の数学教育に関する

思考は連続的とはいいがたい。例えば，高等学校の教員が小学校の算数科教育（教科書の内容や実状）を理解していること，逆に小学校教員が高等学校の数学科の教育の実際（教科書の内容や実状）を把握していることについて十分であるとはいいがたい。こうした現状であるため，算数は得意であったが中学校の数学で躓いた，あるいは中学校の数学まではできたが高等学校の数学で躓いた，などの声を中学生・高校生からよく聞くのも当然のことだと考えられる。このような現状を打開するため，筆者らは小中高の教員が算数･数学の教材について意見交換し，教材開発を行う授業研究を行っている（渡邉他，2014）。

算数・数学の教育内容についての連携がうまくいっていないとの指摘をしたが，例えばその一つの例として「関数」領域が挙げられる。関数は，小学校・中学校・高等学校とどの段階でも扱うが，常に苦手分野の一つとして挙げられることが多い。苦手とする要因として，系統的な内容であるため小さな躓きが積み重なりやすいという面がある一方で，その概念理解が困難であるという面をもち合わせている。関数は，現実事象を数学的に表すことで問題を解決する，あるいは数学の世界の事象を考察する際に用いられる重要な概念である。したがって，関数を小学校から高等学校まで的確に，そして系統的に指導する必要があるといえる。

関数の教育について，これまで様々な研究がなされ，問題点がいろいろと指摘されている。最近では，長年関数教育を研究している菊池（2015）が，生徒が時間を独立変数として捉える事の困難さ，関数のグラフに関して解析幾何学との混同等，これまでの問題点をまとめている。この指摘にもあるように，「関数とそのグラフの関係についての正確な理解」が現時点では，重要な研究視点の一つだと考えられる。

そこで本稿では，小中高の連携を意識したうえで，中学生が，関数のグラフを中心として，「現実事象とグラフを関係づける力」を獲得できるような教育内容の開発を目的とする。なお，開発した教育内容を実際に公立中学校における教育実践を行うことから妥当性の検証を行うこととする。

2. 授業研究と教育内容

授業研究と教育内容について，次の通りである。

2-1. 授業研究の実際

小中高の教育内容の系統性を意識した研究を行うため，2013，2014年度は定期的（１～２ヶ月に１回程度）に小学校，中学校，高等学校，大学の教員が集まり，それぞれの立場から算数･数学の教育内容について授業研究を行ってきた。集まることが困難な場合は，eメールを利用したこともある。それぞれの校種で１名または２名で構成されている。その成果として，渡邉他（2012），口分田他（2014，2015），二澤他（2012，2014）などがある。

関数の教育内容の開発に関しては，算数の比例と反比例，速さ，あるいは高等学校数学の三角比（三角関数）との関連から10回以上議論を重ねた。

2-2.現在の関数の教育内容と課題

現在，関数の指導について小学校では「伴って変わる量」として導入され，比例，反比例を扱う。中学校では，関数の定義，比例，反比例から一次関数，二次関数を扱う。高等学校では，二次関数，指数関数，対数関数，三角関数，三次関数，分数関数，無理関数などを扱い，微分法と積分法につながっていく（Fig.1）。小学校，中学校の教科書では，特に「表・式・グラフ」を中心に関数指導を行う。

関数の指導について，「現実の身近な事象に

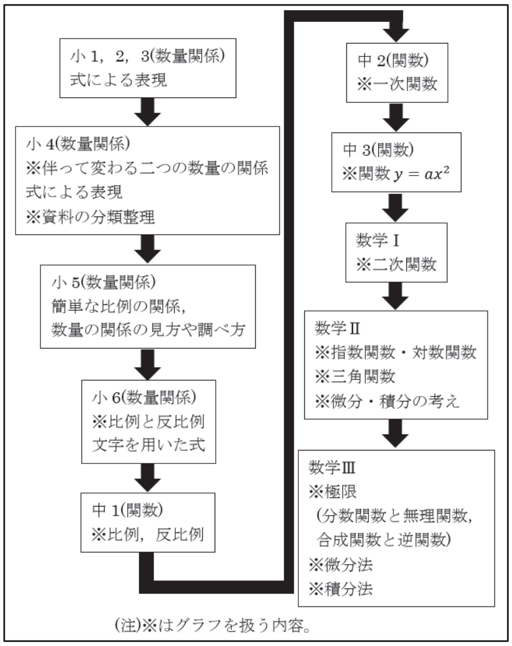


Fig. 1　小中高における関数の指導体系図

関して，関数を抽出・構成し，それを運用し活用する力量も育ってはいない」（菊池，2015）との指摘がある。小学校，中学校，高等学校で指導する関数は主に1変数関数であり，それについて菊池は（2015）は，関数の考え方，独立変数と従属変数の関係を明確に指導することの必要性について述べている。また現実事象の変化を表す際に，時間を独立変数に設定することの困難さを指摘している。

一方，グラフ指導については，小学校4年生から始め，主に棒グラフ，折れ線グラフ，円グラフ，帯グラフ，比例を表すグラフ，反比例を表すグラフを扱う。その後，中学校と高等学校で関数のグラフを本格的に扱うことになる。

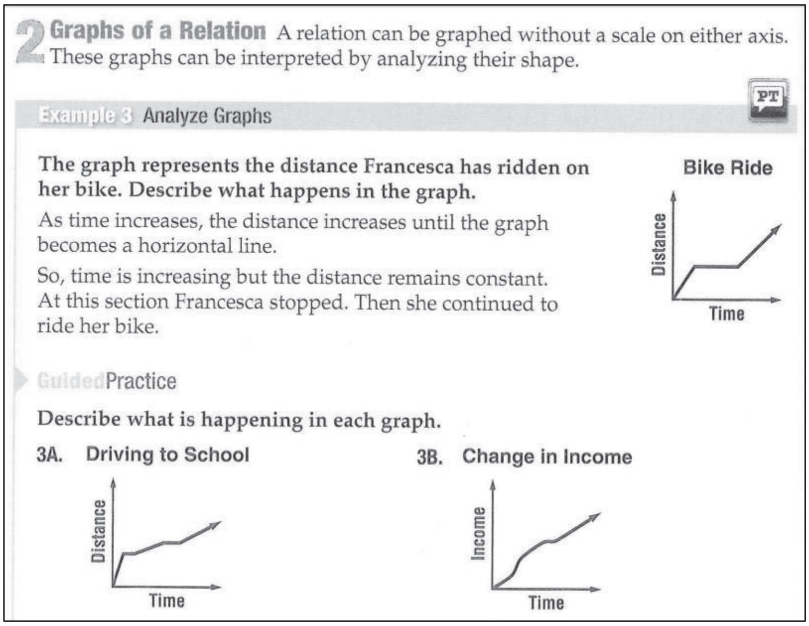
関数のグラフについて，実際に関数のグラフをかく座標平面と解析幾何学の座標平面の混同がみられること（菊池，2015），事象とグラフの関係の理解が生徒にとって容易でないこと（松宮，1986））を示している。さらに，平成27年度全国学力・学習状況調査の報告書において，調査結果から学習指導の改善・充実を図る際のポイントを記述した「学習指導に当たって」にも「グラフを具体的な事象と関連づけて解釈することができるようにする」（国立教育政策研究所 教育課程研究センター，2015）ことがあげられており，「現実事象とグラフを関係づける力」の育成が期待されている。

関数のグラフに着目して小中高の関数の教育内容をみると，算数科では関数のグラフという観点から扱うのは「比例のグラフ」と「反比例のグラフ」で，「比例のグラフ」が中心である。そのため，現実事象と関数のグラフを関係づける事象は，関数の変化率が一定であるような例が多くなる。また中学校1年生では，比例と反比例を関数として捉え，定義域を負の数にまで拡張するが，関数やそのグラフに関係づける事象は小学校段階と大差ない。2年生で1次関数を扱い，関数に関係づける事象はそれ以前より多くなり，1つの事象に複数の関数が関係づけられるようになる。これ以降は，変化の割合が一定でない例なども扱い，対象とする現実事象が多様になる。そのため，現行の指導では中学校2年生が関数のグラフ指導の転機になると考えられる。

2-3. 関数の教材開発について

CCSS（Common Core State Standards）に基づき作成された教科書『ALGEBRA1』（2012）では，グラフを具体的な事象と関連づけるような問題が挙げられている（Fig.2）。

問題「3A」（Fig.3）は，時間と距離の2つの変量を独立変数と従属変数に区別し，時間変化に伴い距離がどのように変化しているのか，ということを正確に読み取る能力が要求される。またグラフの形が変化すると，それに関連して現実事象がどのように変化するのか解釈する能力も要求される。関数のグラフと解析幾何学の座標平面との混同も生じることはない。小学校


2 Graphs of a Relation A relation can be graphed without a scale on either axis. These graphs can be interpreted by analyzing their shape.

Example 3 Analyze Graphs

The graph represents the distance Francesca has ridden on her bike. Describe what happens in the graph.

As time increases, the distance increases until the graph becomes a horizontal line.

So, time is increasing but the distance remains constant. At this section Francesca stopped. Then she continued to ride her bike.

GuidedPractice

Describe what is happening in each graph.

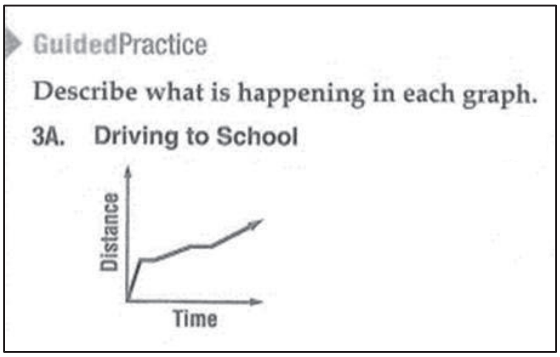
3A. Driving to School

3B. Change in Income

Fig.2　関数のグラフに関する問題例（Carter, et al. 2012）

算数科で学習してきたグラフについて，関数の視点から学びなおす機会となる。さらに，今後様々な関数や関数のグラフを考察する際の基礎になり，「現実事象とグラフを関係づける力」を育成するために必要な題材であると考えられる。

そこで，これをもとに教材開発を行うこととした。さらに教育実践では，実験を取り入れることにする。これに関しては，「数学の学習で


GuidedPractice

Describe what is happening in each graph.

3A. Driving to School

Fig.3　関数のグラフに関する問題例 3A.
（Carter, et al. 2012）

大切なことは，観察，操作や実験などの活動を通して事象に深く関わる体験を経ること，そして，これを振り返って言葉としての数学で表現し，吟味を重ね，さらに洗練されていく活動である。数学の学習は，こうした活動を通して，数学や数学的構造を認識する過程と捉えることができる。観察，操作や実験などの活動による体験を振り返りながら数学的認識を漸次高めていくことは，自らの知識を再構成することにほかならない。」（文部科学省，2008）にあるように，観察，操作や実験などの活動による体験することの重要性が示されている。

一方，現実事象を数学的に考察する場合は，数学的モデリングの能力が必要となる。これは「現実事象・問題⇒現実モデル・問題⇒数学的モデル・問題⇒数学的結果⇒現実結果⇒・・・」（Fig.4）等の過程に対応した能力である。現実事象と関数のグラフを関連づける能力の育成に重点をおくことから，数学的モデリングの過程である「数学的結果⇒現実結果⇒現実状況また

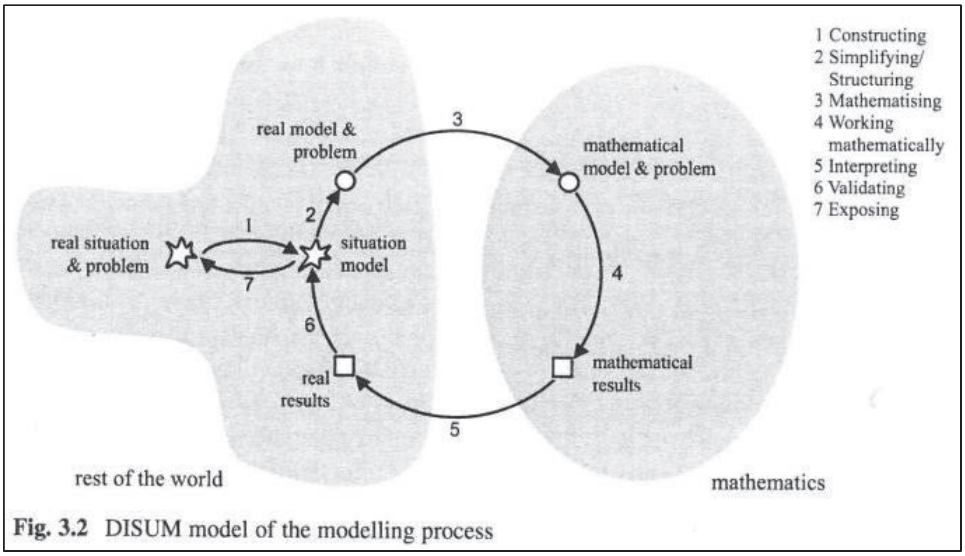


Fig.4　数学的モデリング過程（Blum, 2011）

は現実モデル」に対応する能力の育成につながると考えられる。

以上のことから，現実事象を表す関数のグラフを提示し，それを現実事象に関連付けるような教材開発を行った。関数のグラフと関連づける現実事象について「人が歩く」という事象を対象にし，時間とある地点から人までの距離という2つの変量を基本にした。歩き方を変えることで，様々なグラフを得ることができるからである。

3. 教育実践

教育実践について，次の通りである。

3-1.教育実践の目的・方法

教育実践の目的は，「現実事象とグラフを関係づける力」を育成することである。

教育実践では，CASIOグラフ関数電卓（fx-CG20）にモーションセンサー（EA-200-C, EA-2-DU）を接続し（Fig.5），センサーから人までの距離を計測した（Fig.6）。計測したデータはグラフ関数電卓で表示させ，それをプロジェクターを通して，すべての生徒が確認できるようにした（Fig.7）。

Fig.5　CASIO 関数電卓と距離センサー

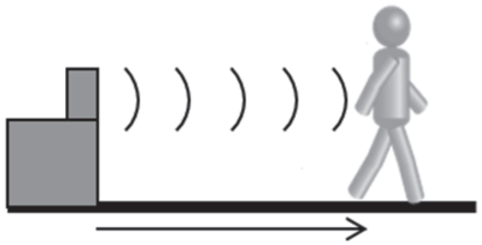


Fig.6　距離センサーを用いた計測イメージ

教育実践は，次の「授業進行の手順」に従い

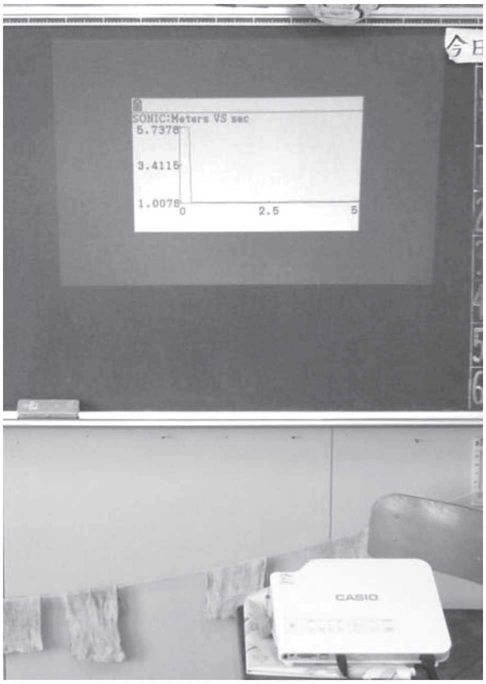


Fig.7　関数電卓に表示されるグラフをプロジェクターで映した様子

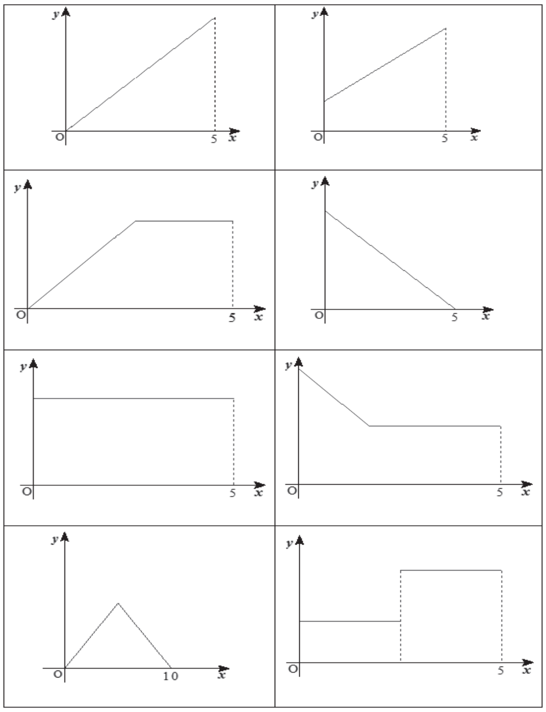


Fig.8 提示した８つのグラフ

行った。

①モーションセンサーのある地点から歩いて遠ざかり，計測データをグラフ表示する。そのグラフの横軸と縦軸の表す変量を考察する。

②生徒に時間とセンサーから人までの距離の関係を表す数学的結果となる関数のグラフを順に提示する（Fig.8）。

③どのように歩けばそのグラフが得られるのか考察させる。

④実際に歩くことで時間とセンサーから人までの距離をグラフ表示させ，その妥当性を確かめさせる。

⑤得られたグラフから変化の割合，関数式，x，y の変域（定義域，値域）などを求めさせる。

⑥速さ（速度）と関数の変化の割合の関係を考察する。

⑦グラフの形（現実事象の状況）に応じてxの変域（定義域）を考察し関数を式表現する。

3-2. 教育実践の実際

次の通り実施した。

対象：公立中学校2年生（30名）

日時：［第1時限］2014年12月19日（A組）

［第2時限］12月24日（A組）

（注意1）教育実践を行った30名を仮にA組と表記した。

（注意2）1時限，2時限とも45分である。

（注意3）教育実践・事後調査が２日間に渡ったため，どちらか１日を出席の生徒は集計の対象から除外した。

方 法：実験，ワークシート記入（記入例はFig.9）及び考察

内容：

［第1時限］

「授業進行の手順」の①～④を実施した。

第1時限の指導に当たって，生徒の主体的な

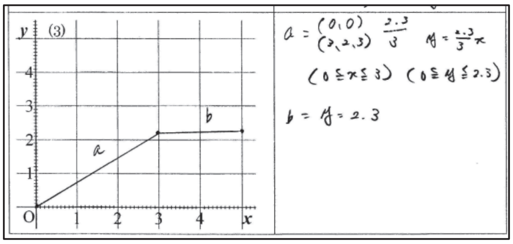


Fig.9　生徒が記入したワークシートの例

学びを重視した。教員からの一方的な説明にならないように，歩き方について生徒に考えさせ，互いに発表し，実際に生徒が歩いてその妥当性を検証できるようにした。

［第2時限］

「授業進行の手順」の⑤〜⑦，及び事後調査等を実施した。

3-3. 教育実践後の調査の内容

事後調査の観点は，

・関数のグラフを現実事象に関連づけることができるか，

・グラフの特徴から，関数の性質や関数式を答えることができるか，

である。

調査問題について，時間的な制約もあり，問題⑸を除き，教育実践で考察した関数のグラフまたはよく似た関数のグラフとした。⑸は，未習である2次関数 $y=ax^2$（$x \geqq 0$）のグラフである。グラフが曲線（関数の変化の割合が一定でない）で表された場合，生徒がどのような事象に関連付けるのかを分析するためにいれた。

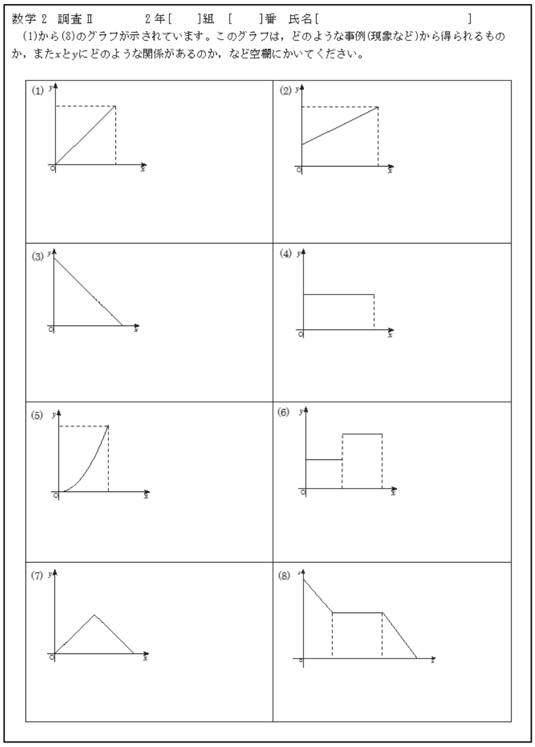
調査問題は，Fig.10の通りである。

3-4. 教育実践後の調査の結果と考察

教育実践を行ったA組とそうでないB組（仮称，36名）において，次の通り実施した。

対象：公立中学校2年生（66名）

日時：2014年12月22日（B組，36名），24日（A組，30名）


数学２ 調査Ⅱ　　２年[　]組 [　]番　氏名[　]

(1)から(8)のグラフが示されています。このグラフは，どのような事例(現象など)から得られるものか，またxとyにどのような関係があるのか，など空欄にかいてください。

Fig.10　調査問題の質問紙（一部抜粋）

方法：質問紙（解答時間は，10分程度）

（注意）A組とB組は平常の数学の試験の成績において，ほぼ同程度の成績である。

現実事象との関係づけについて，生徒の解答した事象の例が適切で2つの変量を正確に説明できている場合，または事象の例が適切であれば2つの変量が正確に説明できていない場合でも「正答」とした。そうでない場合は「誤答」，解答がない場合は「無記入」，解答の説明文の意味が読み取れないもの，複数の異なる意味に読み取れるものは「判断できない」とした。

⑴から⑻の正答率について，教育実践を行ったクラスとそうでないクラスを比較すると次のようになる（Fig.11, 12）。

⑴について70.0％（30名中21名）と16.7％（36名名中6名），⑵について60.0％（30名中18名）と16.7％（36名中6名），⑶について73.3％％（30名中22名）と11.1％（36名中4名），⑷につい

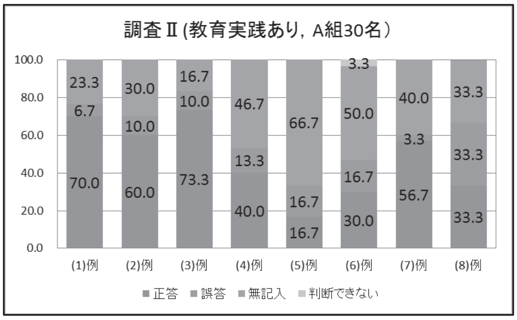


Fig.11　教育実践を行ったクラスを対象とした事後調査の正答率

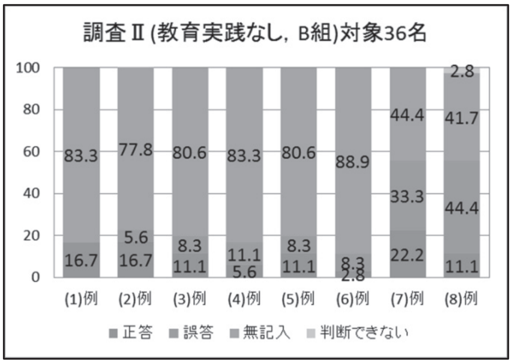


Fig.12　教育実践を行っていないクラスを対象とした調査の正答率

て40.0%（30名中12名）と5.6%（36名中２名），⑸について16.7%（30名中５名）と11.1%（36名中４名），⑹について30.0%（30名中９名）と2.8%（36名中１名），⑺について56.7%（30名中17名）と22.2%（36名中８名），⑻について33.3%（30名中10名）と11.1%（36名中４名）である。⑸を除くと，教育実践を行ったクラスの方が正答率は高い。「無記入」が教育実践を行っていないクラスでは目立つ結果となった。これらのデータはｔ検定においても⑴,⑵,⑶,⑷,⑹,⑺で99%の信頼度で有意差があり，⑻は95%の信頼度で有意差がある。生徒の解答例はFig.13の通りである。⑸は生徒が未習の２次関数のグラフで，クラス間の差はない。正答した生徒は，

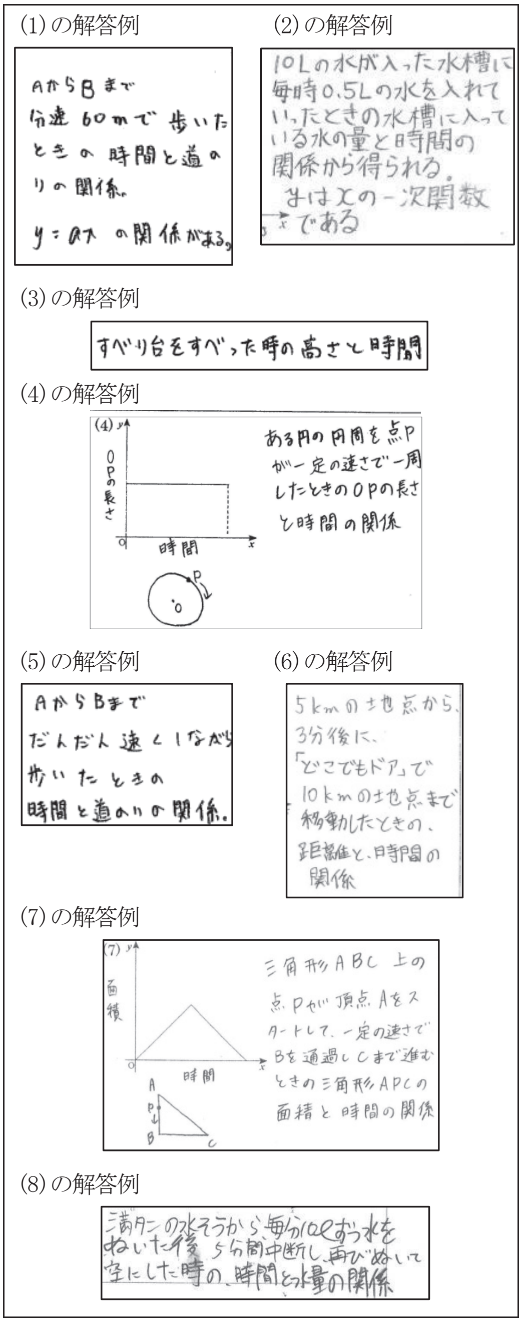


Fig.13　調査問題における現実事象と関連づけた生徒の主な回答例

関数の変化の割合が一定でない関数の見方ができていた。

これらの結果から，グラフの特徴を読み取り，現実事象に関係づける力の育成について一定の成果があったと考えられる。また正しく解答できた生徒は，独立変数と従属変数の関係が理解できている可能性が高い。ただし，グラフの形を図として覚えている可能性を排除することはできない。

誤答と判断した生徒の解答で，後日フィードバックが必要な課題として，「距離」と「道のり」という用語を同義に捉えているということがあげられる（Fig.14）。また，生徒の解答の中に，「～のときの○○と△△の関係」などのように2つの変量を明確に示すことができていないものがあり，表現力の育成も課題としてあげられる。

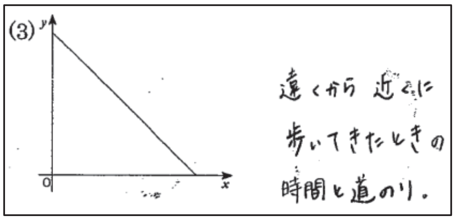


Fig.14 ⑶の誤答例

想定以上に無記入が多かった理由について，次のように分析している。歩くという事象（授業と全く同一の事象），あるいはそれ以外の事象を示して解答してよいという前提で調査を実施している。ただし，特に生徒にはこのことは伝えていない。日頃の授業の様子から，「事後調査の解答時間を十分に確保できなかったことに加えて，大半の生徒が実験内容と少しでも異なる事象で説明しよう，と考えたためではないか（担当教諭）」と考えられる。

xとyの関係について解答している生徒は少なく，解答時間が十分でなかったことが大きく影響していると判断している。

事後調査の際に生徒が書いた感想をみると，関数の学習について積極的なもの，今回の授業のように生徒同士で考えて正しいかどうかを実際に確認できる活動のよさに関する記述が大半であった。

例えば，

・一次関数を身近に感じることができた，
・自分の意見を言ったり，みんなの意見や考えを聞くことで理解できた，
・実際に体験して考える，考えた結果を体験して確かめることで楽しく学べた，

というものである。

このことから，この教育実践については，積極的に取り組んだことが示唆される。

また3名の生徒は，

・難しかった，
・わからなかった，

という感想を書いているため，今後これらの生徒への指導は必要である。

4.まとめ

小中高連携を意識した授業研究として関数領域に焦点をあて，中学校において「現実事象とグラフを関係づける力」の獲得ができる教育内容の開発及び，教育実践を行った。その結果，「現実事象とグラフを関係づける力」に関しては，生徒の学力が向上し一定の成果があった。また，授業中は生徒の積極的な取り組み姿勢が見られた。

今回の教育実践を通して小中高の教育内容を見通したとき，

⑴表現力の育成，
⑵中学校1年生や小学校6年生などの早い時期にこのような実践を行い，現実事象とグラフを関係づける力を育成する，関数や関数のグラフに対する理解を深める，またはそれらを理解する素地をつくることの可能性，

⑶関数の基礎である現実事象から関数関係にある２つの変量を抽出する力についての小学生，中学生，高校生の実態把握，

等の課題が明らかになった。

Acknowledgment: This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 26381236.

【引用・参考文献】

Blum, W. (2011) Can modelling be taught and learn? Some answers from empirical research, in G.Kaiser, W.Blum, R.BFerrari, G.Stillman（Eds.）, *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling, NY:Springer, pp.15-30,

Carter, J. Cuevas, G. Day, R. and Malloy, C.（2012）*Algebra 1*，McGraw -Hill

国立教育政策研究所 教育課程研究センター（2015）『平成27年度全国学力・学習状況調査解説資料　一人一人の生徒の学力・学習状況に応じた学習指導の改善･充実に向けて　中学校数学』，p.74

口分田政史，二澤善紀，渡邉伸樹（2014）「小学校におけるRTMaC授業研究を活かした速さの教育に関する基礎的研究　その１」，『数学教育学会誌』，Vol.54 /No.3・4，PP.71-86

口分田政史，渡邉伸樹（2014）「小学校高学年における確率に関する子どもの認識に関する研究」，『数学教育学会誌』，Vol.54 /No.3・4，PP.87-98

口分田政史，渡邉伸樹，二澤善紀（2014）「小学校におけるRTMaC授業研究を活かした速さの教育に関する基礎的研究　その２」，『数学教育学会誌』，Vol.55 /No.1・2，PP.21-32

口分田政史，渡邉伸樹，二澤善紀（2015）「小学校におけるRTMaC授業研究を活かした「比例」の教育に関する基礎的研究」，『数学教育学会誌』，Vol.56 /No.1・2，PP.27-40

黒田恭史編著（2008）『数学科教育法入門』，共立出版株式会社

黒田恭史編著（2010）『算数科教育法　新しい算数科の授業をつくる』，ミネルヴァ書房

松宮哲夫，柳本哲，桝田尚之，吉野谷成史，工藤満也他（1986），「中学校における二次関数の導入について－手作業とパーソナル・コンピュータの併用を通して」，『数学教育研究16』，大阪教育大学数学教室，PP.23-43

文部科学省（2008）『中学校学習指導要領解説　数学編』，教育出版株式会社，p.26

守屋誠司編（2015）『数学教育学会2013-14年度学会課題研究「戦後数学教育の評価と将来に向けての対応についての研究」報告書』，数学教育学会

二澤善紀，渡邉伸樹（2012）「高等学校におけるRTMaC授業研究による教育実践の試み その1」，Proceedings of International Conference on Mathematics Education Between Japan and China，PP.26-31

二澤善紀，渡邉伸樹（2014）「小学校における面積教育の基礎研究　その１」，『数学教育学会誌』Vol.54 /No.1・2，PP.65-70

土田理（2006）『児童・生徒の時間概念がグラフ認知過程におよぼす影響に関する実証的研究』，課題番号15500595，平成15年度～平成17年度科学研究費補助金（基盤研究（ｃ））研究成果報告書

土田理（2003）『初等学校児童の理科学習における問題解決能力とグラフ認知の関連性についての研究』，課題番号12680187，平成12年度～平成14年度科学研究費補助金（基盤研究（ｃ））研究成果報告書

渡邉伸樹（2010）「小中連携を意識した代数カリキュラム開発のための基礎研究（その1）－小学校高学年における文字式－」，『数学教育学会誌』，Vol.51/No.3・4，PP.67-79

渡邉伸樹，開猛雄，口分田政史，小田翔吾（2014）「現職教員の再教育に効果的な研修に関する実践的研究　その２」，『数学教育学会誌』，Vol.54 /No.1・2，PP.23-33